Paraphrasis in Euclidis elementorum librum secundum

ΒΑΡΛΑΑΜ ΜΟΝΑΧΟΥ ἀριθμητικὴ ἀπόδειξις τῶν γραμμικῶς ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν στοιχείων ἀποδειχθέντων

Ὅροι Ἀριθμὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγω, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι μονάδες, τοσαυτάκις συντεθεὶς ὁ πολλαπλασιαζόμενος ποιήσῃ τινά, ὃν καὶ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι μονάδας. Καλῶ δ' αὐτὸν τὸν ἐκ τούτων γενόμενον ἐπίπεδον. τετράγωνον δ' ἀριθμὸν λέγω τὸν γενόμενον ἀπό τινος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος. Ἀριθμὸν ἀριθμοῦ μέρος λέγω τὸν ἐλάττονα τοῦ μείζο νος, ἄν τε μετρῇ ἄν τε μὴ μετρῇ τὸν μείζονα.

α΄ Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ὄντων διαιρεθῇ ὁ ἕτερος αὐτῶν εἰς ὁσουσδηποτοῦν ἀριθμούς, ὁ ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς δύο ἀριθμῶν ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἴσος ἐστὶ τοῖς ἔκ τε τοῦ ἀδιαιρέτου καὶ ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ διαιρεθέντος γινομένοις ἐπιπέδοις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ αβ, γ, καὶ διῃρήσθω ὁ αβ εἰς 352 ὁσουσδηποτοῦν ἀριθμοὺς τοὺς αδ, δε, εβ. λέγω, ὅτι ὁ ἐκ τῶν γ, αβ ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τοῖς ἐκ τῶν γ, αδ, γ, δε, γ, εβ ἐπιπέδοις. Ἔστω γὰρ ἐκ μὲν τῶν γ, αβ ὁ ζ ἔκ τε τῶν γ, αδ ὁ ηθ, ἐκ δὲ τῶν γ, δε ὁ θι, ἐκ δὲ τῶν γ, εβ ὁ ικ. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ τὸν γ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν ζ, ὁ ἄρα γ μετρεῖ τὸν ζ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸν ηθ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ αδ μονάδας, τὸν δὲ θε κατὰ τὰς ἐν τῷ δε, τὸν δὲ ικ κατὰ τὰς ἐν τῷ εβ μονάδας. ὅλον ἄρα τὸν ηκ μετρεῖ ὁ γ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν ζ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. ἑκάτερος ἄρα τῶν ζ, ηκ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιος τοῦ γ. οἱ δὲ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις πολλαπλάσιοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ζ τῷ ηκ. καί ἐστιν ὁ μὲν ζ ὁ ἐκ τῶν γ, αβ ἐπίπεδος, ὁ δ' ηκ ὁ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ γ καὶ ἑκάστου τῶν αδ, δε, εβ ἐπι πέδων. ὁ ἄρα ἐκ τῶν γ, αβ ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τοῖς ἔκ τε τοῦ γ καὶ ἑκάστου τῶν αδ, δε, εβ ἐπιπέδοις. Ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμῶν ὄντων διαιρεθῇ ὁ ἕτερος αὐτῶν εἰς ὁσουσδηποτοῦν ἀριθμούς, ὁ ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς δύο ἀριθμῶν ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τοῖς ἔκ τε τοῦ ἀδιαιρέτου καὶ ἑκάστου τῶν μερῶν τοῦ διαιρεθέντος ἐπιπέδοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β΄ Ἐὰν ἀριθμὸς εἰς δύο ἀριθμοὺς διαιρεθῇ, δύο ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ γενόμενοι ἔκ τε τοῦ ὅλου καὶ ἑκατέρου τῶν μερῶν συναμφότεροι ἴσοι εἰσὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετραγώνῳ. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ διῃρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς αγ, γβ. λέγω, ὅτι δύο ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν αβ, αγ καὶ ὁ ἐκ τῶν αβ, βγ συντεθέντες ἴσοι εἰσὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αβ τετραγώνῳ. 353 Ὁ γὰρ αβ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν δ, ὁ δὲ αγ τὸν αβ πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν εζ, τὸν δὲ αὐτὸν αβ καὶ ὁ γβ πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν ζη. ἐπεὶ τοίνυν ὁ αγ τὸν αβ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν εζ, ὁ ἄρα αβ μετρεῖ τὸν εζ κατὰ τὰς ἐν τῷ αγ μονάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ γβ τὸν αβ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν ζη, ὁ ἄρα αβ μετρεῖ τὸν ζη κατὰ τὰς ἐν τῷ γβ μονάδας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν εζ κατὰ τὰς ἐν τῷ αγ μονάδας· ὅλον ἄρα τὸν εη μετρεῖ ὁ αβ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ αβ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν δ, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν δ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας. ἑκάτερον ἄρα τῶν δ, εη μετρεῖ ὁ αβ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ δ τοῦ αβ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ εη τοῦ αβ. οἱ δὲ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσάκις πολλαπλάσιοι ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ δ τῷ εη. καί ἐστιν ὁ μὲν δ ὁ ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος, ὁ δὲ εη συντεθεὶς ἐκ δύο ἐπιπέδων ἀριθμῶν τῶν ἐκ τῶν αβ βγ, βα αγ. ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ

Ερευνητικό έργο: ΔΡΟΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΣΤΗΣ – ΨΗΦΙΑΚΗ ΠΑΤΡΟΛΟΓΙΑ. Χρηματοδότηση: ΚΠ Interreg IIIA (ΕΤΠΑ 75%, Εθν. πόροι 25%).
Εργαστήριο Διαχείρισης Πολιτισμικής Κληρονομιάς, www.aegean.gr/culturaltec/chmlab. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας, © 2006.

τῷ συγκειμένῳ ἐκ δύο ἐπιπέδων τῶν ἐκ τῶν αβ βγ, βα αγ. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς εἰς δύο ἀριθμοὺς διαιρεθῇ, δύο ἐπί πεδοι ἀριθμοὶ οἱ γενόμενοι ἔκ τε τοῦ ὅλου καὶ ἑκατέρου τῶν μερῶν συναμφότεροι ἴσοι εἰσὶν τῷ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑνὸς τῶν μερῶν ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν μερῶν ἐπιπέδῳ σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου μέρους τετραγώνῳ. 354 Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ διῃρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς αγ, γβ. λέγω, ὅτι ὁ ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τῷ τε ἐκ τῶν αγ, γβ ἐπιπέδῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ τετραγώνῳ. Ὁ γὰρ αβ πολλαπλασιασάτω τὸν γβ καὶ ποιείτω τὸν δ, ὁ δὲ αγ τὸν γβ πολλαπλασιασάτω καὶ ποιείτω τὸν εζ, ὁ δὲ γβ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν ζη. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ τὸν γβ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν δ, ὁ ἄρα γβ μετρεῖ τὸν δ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ αγ τὸν γβ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν εζ, ὁ ἄρα γβ μετρεῖ τὸν εζ κατὰ τὰς ἐν τῷ αγ μονάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ γβ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν ζη, μετρεῖ ἄρα ὁ γβ τὸν ζη κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν εζ κατὰ τὰς ἐν τῷ αγ μονάδας. ὅλον ἄρα τὸν εη μετρεῖ ὁ γβ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν δ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. ἰσάκις ἄρα ὁ γβ ἑκάτερον τῶν δ, εη μετρεῖ· οἱ δὲ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις μετρούμενοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ δ τῷ εη. καί ἐστιν ὁ μὲν δ ὁ ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπίπεδος, ὁ δὲ εη ὁ ἐκ τῶν αγ, γβ ἐπίπεδος σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ γβ τετραγώνῳ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τῷ τε ἐκ τῶν αγ, γβ ἐπιπέδῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς εἰς δύο ἀριθμοὺς τυχόντας διαιρεθῇ, ὁ ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑνὸς τῶν μερῶν ἐπίπεδος ἴσος ἐστὶ τῷ τε ἐκ τῶν μερῶν ἐπιπέδῳ σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου μέ ρους τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. 355

δʹ Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν μερῶν ἐπιπέδῳ. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ διῃρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς αγ, γβ. λέγω, ὅτι ὁ ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ, γβ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αγ, γβ ἐπιπέδῳ. Ἔστω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ αβ τετράγωνος ὁ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ αγ ὁ εζ, ἀπὸ δὲ τοῦ γβ ὁ ηθ, ἐκ δὲ τῶν αγ, γβ ἑκάτερος τῶν ζη, θκ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ αγ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐποί ησε τὸν εζ, ὁ ἄρα αγ μετρεῖ τὸν εζ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μο νάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ γβ τὸν γα πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν ζη, μετρεῖ ἄρα τὸν ζη ὁ αγ κατὰ τὰς ἐν τῷ γβ μονάδας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν εζ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ. ὅλον ἄρα τὸν εη μετρεῖ ὁ αγ κατὰ τὰς ἐν τῷ αβ μονάδας. ὁ ἄρα αβ πολλα πλασιάσας τὸν αγ ἐποίησε τὸν εη. ὁ εη ἄρα ἐπίπεδός ἐστιν ὁ ἐκ τῶν βα, αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ ηκ ἐπίπε δός ἐστιν ὁ ἐκ τῶν αβ, βγ. καί ἐστιν ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος ὁ δ. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑκατέρου τῶν μερῶν ἐπιπέδοις. ἴσος ἄρα ὁ δ τῷ εκ. ἀλλὰ μὴν ὁ εκ συγκείμενός ἐστιν ἔκ τε τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γβ τετραγώνων καὶ τοῦ δὶς ἐκ τῶν αγ, γβ ἐπιπέδου· ὁ δὲ δ ὑπάρχει ὁ ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος. ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ, γβ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αγ, γβ ἐπιπέδῳ. 356 Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν τετραγώ νοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν μερῶν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

εʹ Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς δίχα διαιρεθῇ, διαιρεθῇ δὲ καὶ εἰς ἀνίσους ἀριθμούς, ὁ ἐκ τῶν ἀνίσων μερῶν ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ μεταξὺ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνῳ. Ἔστω γὰρ ἄρτιος ἀριθμὸς ὁ αβ καὶ διῃρήσθω δίχα μὲν εἰς τοὺς αγ, γβ, ἀνισαχῇ δὲ εἰς τοὺς αδ, δβ. λέγω, ὅτι ὁ ἀπὸ τοῦ γβ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν αδ, δβ ἐπιπέδῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνου. Ἔστω γὰρ ἀπὸ μὲν

Ερευνητικό έργο: ΔΡΟΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΣΤΗΣ – ΨΗΦΙΑΚΗ ΠΑΤΡΟΛΟΓΙΑ. Χρηματοδότηση: ΚΠ Interreg IIIA (ΕΤΠΑ 75%, Εθν. πόροι 25%).
Εργαστήριο Διαχείρισης Πολιτισμικής Κληρονομιάς, www.aegean.gr/culturaltec/chmlab. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας, © 2006.

τοῦ γβ τετράγωνος ὁ ε, ἐκ δὲ τῶν αδ, δβ ἐπίπεδος ὁ ζη, ἀπὸ δὲ τοῦ δγ τετράγωνος ὁ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ βγ ἀριθμὸς διῄρηται εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς βδ, δγ, ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ βγ τετράγωνος, τουτέστιν ὁ ε, ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, δγ τετραγώνοις μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν βδ, δγ. ἔστω οὖν ἀπὸ μὲν τοῦ βδ τετράγωνος ὁ κλ, ἀπὸ δὲ τοῦ δγ ὁ νξ, ἐκ δὲ τῶν βδ, δγ ἑκάτερος τῶν λμ, μν· ὅλος ἄρα ὁ κξ ἴσος ἐστὶ τῷ ε. καὶ ἐπεὶ ὁ βδ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν κλ, μετρεῖ ἄρα αὐτὸν κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ γδ τὸν δβ πολλαπλασιάσας τὸν λμ ἐποίησε, ὁ ἄρα δβ μετρεῖ τὸν λμ κατὰ τὰς ἐν τῷ γδ μονά δας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν κλ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας· ὅλον ἄρα τὸν κμ μετρεῖ ὁ δβ κατὰ τὰς ἐν τῷ γβ μονάδας. ἴσος δὲ ὁ γβ τῷ γα. ὁ ἄρα δβ μετρεῖ τὸν κμ κατὰ τὰς ἐν τῷ γα μονάδας. πάλιν ἐπεὶ ὁ γδ πολλαπλασιάσας τὸν δβ ἐποίησε τὸν μν, ὁ ἄρα δβ μετρεῖ τὸν μν κατὰ τὰς ἐν τῷ δγ μονάδας. ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν κμ κατὰ τὰς ἐν τῷ αγ 357 μονάδας· ὅλον ἄρα τὸν κν μετρεῖ ὁ βδ κατὰ τὰς ἐν τῷ αδ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ζη μετρεῖ ὁ βδ κατὰ τὰς ἐν τῷ αδ μονάδας· ὑπόκειται γάρ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ζη τῷ κν· οἱ γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἰσάκις πολλαπλάσιοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ηθ τῷ νξ ἴσος· ἑκάτερος γὰρ ὑπόκειται ἀπὸ τοῦ γδ τετράγωνος. ὅλος ἄρα ὁ κξ ὅλῳ τῷ ζθ ἴσος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τῷ ε ὁ κξ ἴσος. καὶ ὁ ζθ ἄρα τῷ ε ἴσος ἐστί. καί ἐστιν ὁ μὲν ζθ ὁ ἐκ τῶν αδ, δβ ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ δγ τετραγώνου, ὁ δὲ ε ὁ ἀπὸ τοῦ γβ τετράγωνος. ὁ ἄρα ἐκ τῶν αδ, δβ ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ δγ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἄρτιος ἀριθμὸς διαιρεθῇ δίχα, διαιρεθῇ δὲ καὶ εἰς ἀνίσους ἀριθμούς, ὁ ἐκ τῶν ἀνίσων μερῶν ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ μεταξὺ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ´ Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς διαιρεθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῷ, ὁ ἐκ τοῦ ὅλου σὺν τῷ προσκειμένῳ καὶ τοῦ προσκει μένου ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦ προσκειμένου τετραγώνῳ. Ἄρτιος γὰρ ἀριθμὸς ὁ αβ διῃρήσθω δίχα εἰς τοὺς αγ, γβ ἀριθμούς, καὶ προσκείσθω αὐτῷ ἕτερός τις ἀριθμὸς ὁ βδ. λέγω, ὅτι ὁ ἐκ τῶν αδ, δβ ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γβ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνῳ. Ἔστω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ γδ τετράγωνος ὁ ε, ἐκ δὲ τῶν αδ, δβ ἐπίπεδος ὁ ζη, ἀπὸ δὲ τοῦ γβ τετράγωνος ὁ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ γδ ἴσος ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δβ, βγ μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν δβ, βγ, ἔστω ἀπὸ μὲν τοῦ βδ ὁ κλ, ἐκ δὲ τῶν δβ, βγ ἑκάτερος τῶν λμ, μν, ἀπὸ δὲ τοῦ βγ ὁ νξ. ὅλος ἄρα ὁ κξ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνῳ. καί ἐστιν ἀπὸ τοῦ γδ τετράγωνος ὁ ε· ὁ ἄρα κξ ἴσος ἐστι τῷ ε. καὶ ἐπεὶ ὁ βδ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν κλ πεποίηκε, ὁ ἄρα βδ μετρεῖ τὸν κλ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν λμ κα 358 τὰ τὰς ἐν τῷ βγ μονάδας· ὅλον ἄρα τὸν κμ μετρεῖ ὁ δβ κατὰ τὰς ἐν τῷ γδ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ δβ μετρεῖ καὶ τὸν μν κατὰ τὰς ἐν τῷ γβ μονάδας, ἴσος δὲ ὁ γβ τῷ γα· ὑπό κειται γάρ· ὅλον ἄρα τὸν κν μετρεῖ ὁ δβ κατὰ τὰς ἐν τῷ αδ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ζη μετρεῖ ὁ δβ κατὰ τὰς ἐν τῷ αδ μονάδας· ὑπόκειται γὰρ ὁ ζη ἐκ τῶν αδ, δβ· ἴσος ἄρα ὁ ζη τῷ κν. ἔστι δὲ καὶ ὁ θη τῷ νξ ἴσος· ἑκάτερος γάρ ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ γβ τετράγωνος. ὅλος ἄρα ὁ ζθ τῷ κξ ἐστιν ἴσος. ὁ δὲ κξ ἀπεδείχθη τῷ ε ἴσος· καὶ ὁ ζθ ἄρα τῷ ε ἴσος ἐστί. καί ἐστιν ὁ μὲν ζθ ὁ ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γβ τετραγώνου, ὁ δὲ ε ὁ ἀπὸ τοῦ γδ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γβ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἄρτιος ἀριθμὸς διαιρεθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῷ, ὁ ἐκ τοῦ ὅλου σὺν τῷ προσκειμένῳ καὶ τοῦ προσκει μένου ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦ προσκειμένου τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ερευνητικό έργο: ΔΡΟΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΣΤΗΣ – ΨΗΦΙΑΚΗ ΠΑΤΡΟΛΟΓΙΑ. Χρηματοδότηση: ΚΠ Interreg IIIA (ΕΤΠΑ 75%, Εθν. πόροι 25%).
Εργαστήριο Διαχείρισης Πολιτισμικής Κληρονομιάς, www.aegean.gr/culturaltec/chmlab. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας, © 2006.

ζ´ Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀφ' ἑνὸς τῶν μερῶν τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ἐκ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ εἰρημένου μέρους ἐπι πέδῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ μέρους τετραγώνου. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ διῃρήσθω εἰς τοὺς αγ, γβ ἀριθμούς. λέγω, ὅτι οἱ ἀπὸ τῶν βα, αγ τετράγωνοι ἴσοι εἰσὶν τῷ δὶς ἐκ τῶν βα, αγ ἐπιπέδῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ βγ τετραγώνου. 359 Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βγ, γα καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν βγ, γα, κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ τοῦ αγ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ βα μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνοις καὶ ἑνὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν βγ, γα. καὶ ἐπεὶ ὁ ἅπαξ ἐκ τῶν βα, αγ ἴσος ἐστὶ τῷ ἅπαξ ἐκ τῶν βγ, γα μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γα τετραγώνου, ὁ ἄρα δὶς ἐκ τῶν βα, αγ ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν βγ, γα μετὰ δύο τῶν ἀπὸ τοῦ γα τετραγώνων. κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ τοῦ βγ τετρά γωνος· δύο ἄρα τετράγωνοι ἀπὸ τοῦ αγ καὶ εἷς ἀπὸ τοῦ γβ μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν βγ, γα ἴσοι εἰσὶν τῷ δὶς ἐκ τῶν βα, αγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γβ. ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν βα, αγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ γβ μέρους τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀφ' ἑνὸς τῶν μερῶν τετρα γώνου ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ἐκ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ εἰρημένου μέ ρους ἐπιπέδῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ μέρους τετραγώ νου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η´ Ἐὰν ἀριθμὸς εἰς δύο ἀριθμοὺς διαιρεθῇ, ὁ τετράκις ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑνὸς τῶν μερῶν ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ μέρους τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ προειρημένου μέρους ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνῳ. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ διῃρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς αγ, γβ. λέγω, ὅτι ὁ τετράκις ἐκ τῶν αβ, βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αβ, βγ ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνῳ. Κείσθω γὰρ τῷ βγ ἀριθμῷ ἴσος ὁ βδ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ 360 τοῦ αδ ἴσος ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βδ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αβ, βδ ἐπιπέδῳ, καί ἐστιν ὁ βδ ἴσος τῷ βγ, ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπιπέδῳ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπιπέδῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ἴσος τῷ τετράκις ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπι πέδῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνῳ. καί ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ὁ ἀπὸ τοῦ αβ, βγ ὡς ἀφ' ἑνός· ὁ γὰρ βδ ἴσος ἐστὶ τῷ βγ. ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ αβ, βγ ὡς ἀφ' ἑνὸς τετράγωνος ἴσος τῷ τετράκις ἐκ τῶν αβ, βγ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς εἰς δύο ἀριθμοὺς διαιρεθῇ, ὁ τετράκις ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑνὸς τῶν μερῶν ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ μέρους τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ προειρημένου μέρους ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνῳ. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ διῃρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς αγ, γβ. λέγω, ὅτι ὁ τετράκις ἐκ τῶν αβ, βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αβ, βγ ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνῳ. Κείσθω γὰρ τῷ βγ ἀριθμῷ ἴσος ὁ βδ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ 360 τοῦ αδ ἴσος ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βδ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αβ, βδ ἐπιπέδῳ, καί ἐστιν ὁ βδ ἴσος τῷ βγ, ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπιπέδῳ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπιπέδῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ἴσος τῷ τετράκις ἐκ τῶν αβ, βγ ἐπιπέδῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνῳ. καί ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ὁ ἀπὸ τοῦ αβ, βγ ὡς ἀφ' ἑνός· ὁ γὰρ βδ ἴσος ἐστὶ τῷ βγ. ἔστιν ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ αβ, βγ ὡς ἀφ' ἑνὸς τετράγωνος ἴσος τῷ τετράκις ἐκ τῶν αβ, βγ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς εἰς δύο ἀριθμοὺς διαιρεθῇ, ὁ τετράκις ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑνὸς τῶν μερῶν ἐπίπεδος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ μέρους τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ προειρημένου μέρους ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄ Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεθῇ δίχα, ἔτι δὲ διαιρεθῇ καὶ εἰς ἀνίσους ἀριθμούς, οἱ ἀπὸ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν τετράγωνοι διπλάσιοί εἰσι τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνου μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ μεταξὺ τετραγώνου. Ἄρτιος γὰρ ἀριθμὸς ὁ αβ δίχα διῃρήσθω εἰς τοὺς αγ, γβ ἀριθμούς, εἰς ἀνίσους δὲ διῃρήσθω τοὺς αδ, δβ. λέγω, ὅτι οἱ ἀπὸ τῶν αδ, δβ τετράγωνοι διπλάσιοί εἰσι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ τετραγώνων. Ἐπεὶ γὰρ ἄρτιος ἀριθμὸς ὁ αβ εἰς ἴσους μὲν διῄρηται τοὺς αγ, γβ, εἰς ἀνίσους δὲ τοὺς αδ, δβ, ὁ ἄρα ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γδ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αγ τετρα 361 γώνῳ. ὁ δὶς ἄρα ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ δύο τῶν ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνων διπλάσιός ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνου. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ δίχα διῄρηται εἰς τοὺς αγ, γβ, ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τετραγώνου. καὶ ἐπεὶ ὁ δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ δύο τῶν ἀπὸ τοῦ δγ διπλάσιός ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ γα, ἐὰν δὲ ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὁ μὲν ἕτερος αὐτῶν τοῦ αὐτοῦ τετραπλάσιος, ὁ δ' ἕτερος διπλάσιος, ὁ τετραπλάσιος διπλάσιός ἐστι τοῦ διπλασίου, ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ αβ διπλάσιός ἐστι τοῦ δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ δύο τῶν ἀπὸ τοῦ δγ. ἔστιν ἄρα ὁ δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ ἐλάττων ἡμίσεος τοῦ ἀπὸ τοῦ αβ τῷ δὶς ἀπὸ τοῦ δγ. καὶ ἐπεὶ ὁ δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ, δβ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ αβ, ὁ ἄρα συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ, δβ μείζων ἐστὶν ἡμίσεος τοῦ ἀπὸ τοῦ αβ τῷ δὶς ἀπὸ τοῦ δγ. καί ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ αβ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τετραπλάσιος· ὁ ἄρα συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπὸ τοῦ αδ, δβ μείζων ἐστὶ διπλασίου τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ τῷ δὶς ἀπὸ τοῦ δγ. διπλάσιος ἄρα ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. Ἐὰν ἄρα ἄρτιος ἀριθμὸς διαιρεθῇ δίχα, ἔτι δὲ διαιρεθῇ καὶ εἰς ἀνίσους ἀριθμούς, οἱ ἀπὸ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν τετράγωνοι διπλάσιοί εἰσι τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνου μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ μεταξὺ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄ Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς διαιρεθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῷ ἕτερος ἀριθμός, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου σὺν τῷ προσκειμένῳ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ προσκειμένου οἱ συναμφότεροι τετράγωνοι διπλάσιοί εἰσι τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνου καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦ προσκειμένου ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνου. 362 Ἔστω γὰρ ἄρτιος ἀριθμὸς ὁ αβ καὶ διῃρήσθω δίχα εἰς τοὺς αγ, γβ, καὶ προσκείσθω αὐτῷ ἕτερός τις ἀριθμὸς ὁ βδ. λέγω, ὅτι οἱ ἀπὸ τῶν αδ, δβ τετράγωνοι διπλάσιοί εἰσι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ τετραγώνων. Ἐπεὶ γὰρ ἀριθμὸς ὁ αδ διῄρηται εἰς τοὺς αβ, βδ, οἱ ἄρα ἀπὸ τῶν αδ, δβ τετράγωνοι ἴσοι εἰσὶν τῷ δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ ἐπιπέδῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ αβ τετραγώνου. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ αβ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τέσσαρσι τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γβ τετραγώνοις· ἴσος γάρ ἐστιν ὁ αγ τῷ γβ. οἱ ἄρα ἀπὸ τῶν αδ, δβ τετράγωνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τε δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ καὶ τέσσαρσι τοῖς ἀπὸ τῶν βγ, γα. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γβ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γδ, ὁ ἄρα δὶς ἐκ τῶν αδ, δβ μετὰ δύο τῶν ἀπὸ τοῦ γβ ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἀπὸ τοῦ γδ. οἱ ἄρα ἀπὸ τῶν αδ, δβ τετράγωνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ τοῖς ἀπὸ τοῦ γδ καὶ δυσὶ τοῖς ἀπὸ τοῦ αγ. διπλάσιοι ἄρα εἰσὶν τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ αδ τετράγωνος ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ προσκειμένου, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δβ ὁ ἀπὸ τοῦ προσκειμένου, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ γδ ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦ προσκειμένου. ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ὅλου σὺν τῷ προσκειμένῳ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ προσκειμένου διπλάσιός ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦ προσκειμένου. Ἐὰν ἄρα ἄρτιος ἀριθμὸς δίχα διαιρεθῇ, προστεθῇ δέ τις αὐτῷ ἕτερος ἀριθμός, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου σὺν τῷ προσκειμένῳ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ προσκειμένου οἱ συναμφότεροι τετράγωνοι διπλάσιοί εἰσι τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τετραγώνου καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦ προσκειμένου ὡς ἀφ' ἑνὸς τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ερευνητικό έργο: ΔΡΟΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΣΤΗΣ – ΨΗΦΙΑΚΗ ΠΑΤΡΟΛΟΓΙΑ.
Χρηματοδότηση: ΚΠ Interreg IIIA (ΕΤΠΑ 75%, Εθν. πόροι 25%).
Εργαστήριο Διαχείρισης Πολιτισμικής Κληρονομιάς, www.aegean.gr/culturaltec/chmlab.
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας, © 2006.